

سلسلة 4	الأعداد العقدية حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية
تمرين 1 :		
<p>نضع : $u = a + bi$ حيث $(a; b) \in \mathbb{R}^2$</p> $u^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + 2abi = -7 - 24i \\ u ^2 = \Delta ^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -7 \\ 2ab = -24 \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 18 \\ 2b^2 = 32 \\ ab = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 16 \\ ab = -12 \end{cases}$ <p>لدينا : $ab = -12$</p> $u^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -3 \\ b = 4 \end{cases}$ <p>بالتالي جذرا Δ المربعين هما : $u_1 = 3 - 4i$ و $u_2 = -3 + 4i$</p>		
<p>رغم أنه في غالب الأحيان يطلب فقط التحقق من الجذرين المربعين لكن الامام بطريقة تحديد الجذرين أمرهم وينبغي التمكن منه رغم صعوبة الحسابات أحيانا.</p>		
<p>لنحل في C المعادلة : $z^2 - (1 + 2i)z + (1 + 7i) = 0$</p> <p>لدينا : $\Delta = (1 + 2i)^2 - 4(1 + 7i) = 1 + 4i - 4 - 4 - 28i = -7 - 24i = (3 - 4i)^2$</p> <p>إذن : $z_1 = \frac{1 + 2i + 3 - 4i}{2} = 2 - i$ و $z_2 = \frac{1 + 2i - 3 + 4i}{2} = -1 + 3i$</p> <p>بالتالي : $S = \{2 - i ; -1 + 3i\}$</p>		
تمرين 2 :		
<p>لنحل في C المعادلة : $iz^2 + (1 + \sqrt{3}i)z + \sqrt{3} = 0$</p> <p>لدينا : $\Delta = (1 + \sqrt{3}i)^2 - 4\sqrt{3}i = 1 + 2\sqrt{3}i - 3 - 4\sqrt{3}i = 1 - 2\sqrt{3}i - 3 = (1 - \sqrt{3}i)^2$</p> <p>إذن : $z_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}i + 1 - \sqrt{3}i}{2i} = \frac{-2\sqrt{3}i}{2i} = -\sqrt{3}$ و $z_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i - 1 + \sqrt{3}i}{2i} = \frac{-2}{2i} = i$</p> <p>بالتالي : $S = \{i ; -\sqrt{3}\}$</p>		
<p>لاداعي لتحديد الجذرين المربعين للمحددة لأننا نستطيع بسهولة التعرف على متطابقة هامة شبيهة بالتي نشرنا</p>		
تمرين 3 :		
<p>$r \in]1; +\infty[, (E) : 2z^2 - 2(r + i)z + r^2 - 1 = 0$</p> <p>لدينا : $\Delta = 4(r + i)^2 - 8(r^2 - 1) = 4(r^2 + 2ri - 1) - 8r^2 + 8 = 4r^2 + 8ri - 4 - 8r^2 + 8$</p> <p>$\Delta = -4r^2 + 8ri + 4 = -4(r^2 - 2ri - 1) = (2i)^2(r - i)^2 = (2ri + 2)^2$</p> <p>إذن : $z_1 = \frac{2(r + i) - 2(ri + 1)}{4} = \frac{r - 1}{2} - \frac{r - 1}{2}i$ و $z_2 = \frac{2(r + i) + 2(ri + 1)}{4} = \frac{r + 1}{2} + \frac{r + 1}{2}i$</p> <p>بالتالي : $S = \left\{ \frac{r - 1}{2} - \frac{r - 1}{2}i ; \frac{r + 1}{2} + \frac{r + 1}{2}i \right\}$</p>		
<p>$z_1 = \frac{r - 1}{2} - \frac{r - 1}{2}i = \frac{r - 1}{2}(1 - i) = \frac{r - 1}{2}\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \left[\frac{r - 1}{\sqrt{2}} ; \frac{-f}{4}\right]$</p>		
<p>$z_2 = \frac{r + 1}{2} + \frac{r + 1}{2}i = \frac{r + 1}{2}(1 + i) = \frac{r + 1}{2}\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \left[\frac{r + 1}{\sqrt{2}} ; \frac{f}{4}\right]$</p>		
<p>(لأن : $\frac{r - 1}{\sqrt{2}} > 0$ و $\frac{r + 1}{\sqrt{2}} > 0$)</p>		

تمرين 4: $P(z) = z^3 + (1-3i)z^2 - (2+3i)z - 2$

ليكن $a \in \mathbb{R}$ نضع $z_0 = ai$

لدينا:

$$P(z_0) = 0 \Leftrightarrow -a^3i - (1-3i)a^2 - a(2+3i)i - 2 = 0 \Leftrightarrow -a^3i - a^2 + 3a^2i - 2ai + 3a - 2 = 0$$

$$P(z_0) = 0 \Leftrightarrow -a^2 + 3a - 2 + (-a^3 + 3a^2 - 2a)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -a^2 + 3a - 2 = 0 \\ -a^3 + 3a^2 - 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3a + 2 = 0 \\ -a(a^2 - 3a + 2) = 0 \end{cases}$$

$$P(z_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3a + 2 = 0 \\ a = 0 \end{cases} \text{ ou } \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3a + 2 = 0 \\ a^2 - 3a + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \text{ ou } a = 2$$

1

إذن الحدودية P تقبل جذرين تخيليين صرفين هما $z_0 = i$ و $z_1 = 2i$

يمكننا ببساطة إجراء التكافؤات أعلاه في البحث أما الجواب فيكفي أن نحسب مثلا $P(i)$ و نجد 0
المطلوب أن نجد حلا تخيليا صرفا واحدا لكننا وجدنا اثنين، في الجواب يمكن الاكتفاء بأحدهما، لكن هذه النتيجة ستكون مفيدة في السؤال الموالي

بما أن كلا من $z_0 = i$ و $z_1 = 2i$ جذر للحدودية P فإن هذه الأخيرة ستقبل القسمة على $z - i$ و $z - 2i$

إذن توجد حدودية Q من الدرجة الأولى معاملاتها أعداد عقدية تحقق: $\begin{cases} P(z) = Q(z)(z-i)(z-2i) \\ Q(z) = az + b \quad / (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \end{cases}$

$$P(z) = (az + b)(z-i)(z-2i) \Rightarrow \begin{cases} P(0) = b \times (-i) \times (-2i) = -2b \\ P(-i) = (-ai + b) \times (-2i) \times (-3i) = -6(-ai + b) \end{cases}$$

$$P(z) = (az + b)(z-i)(z-2i) \Rightarrow \begin{cases} -2 = -2b \\ i - (1-3i) + (2+3i)i - 2 = 6ai - 6b \end{cases} \text{ لدينا:}$$

$$P(z) = (az + b)(z-i)(z-2i) \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ -6 + 6i = 6ai - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = \frac{6i}{6i} = 1 \end{cases}$$

2

بالتالي: $P(z) = (z+1)(z-i)(z-2i)$

بالتالي مجموعة حلول المعادلة: $P(z) = 0$ هي: $S = \{-1; i; 2i\}$

الطريقة الاعتيادية لحل مثل هذا السؤال هي إجراء القسمة الإقليدية، لكننا أثرنا إدراج طريقة مختلفة قصد توسيع المعارف، اختيار العددين 0 و $-i$ جاء لتكون الحسابات أبسط ما يمكن
كان يمكن تحديد العدد العقدي a بطريقة أبسط لكن هذه الطريقة تتطلب تعاريف لا تدرس حاليا في مستوى البكالوريا

تمرين 5: نعتبر في C المعادلة: $(E) : z^3 - 2(2+3i)z^2 - 4(1-5i)z + 16(1-i) = 0$

ليكن $a \in \mathbb{R}$ نضع $z_0 = a$ و $P(z) = z^3 - 2(2+3i)z^2 - 4(1-5i)z + 16(1-i)$

لدينا:

$$P(z_0) = 0 \Leftrightarrow a^3 - 2(2+3i)a^2 - 4(1-5i)a + 16(1-i) \Leftrightarrow a^3 - 4a^2 - 6a^2i - 4a + 20ai + 16 - 16i = 0$$

$$P(z_0) = 0 \Leftrightarrow a^3 - 4a^2 - 4a + 16 + (-6a^2 + 20a - 16)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 4a^2 - 4a + 16 = 0 \\ -6a^2 + 20a - 16 = 0 \end{cases}$$

1

$$P(z_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2(a-4) - 4(a-4) = 0 \\ 3a^2 - 10a + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-4)(a^2-4) = 0 \\ 3a^2 - 6a - 4a + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-4)(a-2)(a+2) = 0 \\ 3a(a-2) - 4(a-2) = 0 \end{cases}$$

$$P(z_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \text{ ou } a = 2 \text{ ou } a = -2 \\ a = 2 \text{ ou } a = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a = 2$$

إذن المعادلة (E) تقبل حلا حقيقيا $z_0 = 2$.

لدينا :

$$\begin{array}{r|l} z^3 - 2(2+3i)z^2 - 4(1-5i)z + 16(1-i) & z-2 \\ \hline z^3 - 2z^2 & z^2 + (-2-6i)z + (-8+8i) \\ 0 \quad (-2-6i)z^2 - 4(1-5i)z & \\ \quad (-2-6i)z^2 + (4+12i)z & \\ \quad \quad 0 \quad (-8+8i)z + 16(1-i) & \\ \quad \quad \quad (-8+8i)z + 16 - 16i & \\ \quad \quad \quad \quad 0 & \end{array}$$

2

إذن $P(z) = (z-2)(z^2 - 2(1+3i)z - 8 + 8i) = 0$ منه $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 2$ ou $z^2 - 2(1+3i)z - 8 + 8i = 0$
 ولدينا : $\Delta = 4(1+3i)^2 - 4(-8+8i) = 4(1+6i-9+8-8i) = 4(-2i) = 4(1-i)^2$
 إذن : $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 2$ ou $z = \frac{2(1+3i) + 2(1-i)}{2}$ ou $z = \frac{2(1+3i) - 2(1-i)}{2}$
 $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 2$ ou $z = 2 + 2i$ ou $z = 4i$
 بالتالي : $S = \{2; 2+2i; 4i\}$

🌟 لاحظ أهمية المتساوية الهامة : $(1+i)^2 = 2i$ و $(1-i)^2 = -2i$ لتفادي البحث عن الجذور المربعة كما في التمرين الأول

تمرين 6 : نعتبر في C المعادلة : $az^2 - i(a^4 + 1)z - a^3 = 0$ حيث $a \in \mathbb{C}^*$

لدينا : $\Delta = (i(a^4 + 1))^2 + 4a^4 = -(a^8 + 2a^4 + 1) + 4a^4 = -(a^8 - 2a^4 + 1) = -(a^4 - 1)^2$
 منه : $\Delta = 0 \Leftrightarrow a^4 = 1 \Leftrightarrow (a^2 - 1)(a^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow (a-1)(a+1)(a-i)(a+i) = 0 \Leftrightarrow a \in \{1; -1; i; -i\}$

1

🌟 وجب الاحتياط في هذا السؤال ففي المجموعة C وعكس المجموعة IR : $a^n = 1$ لا تعني $a = 1$ سواء كان الأس زوجيا أم فرديا، بل a يمثل جذرا نونيا للعدد 1، بمعنى هناك n قيمة للعدد a

لدينا : $\Delta = (i(a^4 - 1))^2$
 منه : $z_2 = \frac{i(a^4 + 1) - i(a^4 - 1)}{2a} = \frac{2i}{2a} = \frac{i}{a}$ و $z_1 = \frac{i(a^4 + 1) + i(a^4 - 1)}{2a} = \frac{2a^4 i}{2a} = a^3 i$
 بالتالي : $S = \left\{ a^3 i; \frac{i}{a} \right\}$

2

(ب) لدينا $i = \left[1; \frac{f}{2} \right]$ و $a = [r; n]$ منه : $a^3 = [r^3; 3n]$ منه : $z_1 = \left[r^3; 3n + \frac{f}{2} \right]$ و $z_2 = \left[\frac{1}{r}; \frac{f}{2} - n \right]$

(ب)

$z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{i(a^4 + 1)}{2a} = 0 \Leftrightarrow a^4 = -1 \Leftrightarrow a^4 = i^2 \Leftrightarrow (a^2 = i) \text{ ou } (a^2 = -i)$
 $z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow \left(a^2 = \frac{1}{2}(1+i)^2 \right) \text{ ou } \left(a^2 = \frac{1}{2}(1-i)^2 \right)$
 $z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow a \in \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i); \frac{-\sqrt{2}}{2}(1+i); \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i); \frac{-\sqrt{2}}{2}(1-i) \right\}$

3

🌟 القيم المحصل عليها ثم الجذور من الدرجة الرابعة للعدد -1

🌟 مرة أخرى لاحظ أهمية : $(1+i)^2 = 2i$ و $(1-i)^2 = -2i$